DM 1

Version française

Les devoirs peuvent être rédigés en français ou en anglais et doivent être remis en personne ou envoyés par e-mail à `dghosh@lmf.cnrs.fr` *avant le 23 Avril 2026. Et merci d'éviter d'utiliser un modèle d'IA afin que tout le monde puisse être noté de manière équitable.*

Considérons le jeu à deux joueurs suivant. Le jeu commence avec k jetons placés sur le nombre 0 de la droite numérique des nombres entiers $[0, n]$. À chaque tour, un joueur, appelé le *choisisseur*, sélectionne deux ensembles de jetons A et B disjoints et non vides. (Les ensembles A et B ne doivent pas nécessairement couvrir tous les jetons restants ; ils doivent simplement être disjoints.) Le deuxième joueur, appelé le *retireur*, enlève tous les jetons de l'un des ensembles du plateau. Ensuite, tous les jetons de l'autre ensemble avancent d'une place sur la droite numérique à partir de leur position actuelle. Le choisisseur gagne si un jeton atteint n. Le retireur gagne si le choisisseur termine avec un seul jeton, et que ce jeton n'a pas atteint n.

1. Donnez une stratégie gagnante pour le choisisseur lorsque $k \geq 2^n$.
2. Utilisez la méthode probabiliste (voir TD 9) pour montrer qu'il doit exister une stratégie gagnante pour le retireur lorsque $k < 2^n$.
3. Expliquez comment utiliser la méthode des espérances conditionnelles pour dérandomiser la stratégie gagnante du retireur lorsque $k < 2^n$.

English version

Homeworks may be written in either French or English, and are to be submitted in person or by email to `dghosh@lmf.cnrs.fr` *by the end of 23 April 2026. And please, avoid using an LLM so that everyone can be graded fairly.*

Consider the following two-player game. The game begins with k tokens placed at the number 0 on the integer number line spanning $[0, n]$. Each round, one player, called the *chooser*, selects two disjoint and nonempty sets of tokens A and B. (The sets A and B need not cover all the remaining tokens ; they only need to be disjoint.) The second player, called the *remover*, takes all the tokens from one of the sets off the board. Then tokens from the other set all move up one space on the number line from their current position. The chooser wins if any token ever reaches n. The remover wins if the chooser finishes with one token, and moreover the token has not reached n.

1. Give a winning strategy for the chooser when $k \geq 2^n$.
2. Use the probabilistic method (see TD 9) to show that there must exist a winning strategy for the remover when $k < 2^n$.
3. Explain how to use the method of conditional expectations to derandomize the winning strategy for the remover when $k < 2^n$.